Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ставропольский государственный аграрный университет»

Кафедра «Математика»

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

Ставрополь 2020

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я73

Литвин, Д.Б.

Линейная алгебра: учебное пособие / Д. Б. Литвин ; Ставропольский гос. аграрный ун-т. – Ставрополь, 2020. – 80 с.

Пособие предназначено для студентов экономических направлений обучения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Действия над матрицами

Матрицу A^T называют ***транспонированной*** по отношению к матрице A, а переход от A к A^T ***транспонированием***, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке как столбцы матрицы A^T, другими словами, $a_{ij}^T = a_{ji}$, $i=\{1,2,...m\}$, $j=\{1,2,...n\}$, в частности для векторов

$$a=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}; \qquad b=a^T=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Линейные операции над матрицами – сложение матриц и умножение матрицы на число выполняются по аналогии с соответствующими операциями над алгебраическими векторами.

Сложение (вычитание) матриц определено только для матриц одинаковых размерностей.

Матрица $C_{m\times n}=A_{m\times n}+B_{m\times n}$ является **суммой** матриц А и В, если ее элементы представляют собой сумму соответствующих элементов исходных матриц:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ i=\{1,2,...m\},\ j=\{1,2,...n\}.$$

Умножением матрицы A на произвольное число α называется матрица B той же размерности, что и A, все элементы которой умножаются на это число

$$b_{ij}=\alpha\cdot a_{ij},\ i=\{1,2,...m\},\ j=\{1,2,...n\}.$$

Матрицы и линейные операции над ними удовлетворяют аксиомам линейного пространства, в частности:

$$A+B=B+A; \quad (C+A)+B=C+(A+B). \tag{1}$$

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B; (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A; \quad (\alpha\beta)A=\alpha(\beta A). \tag{2}$$

Поэтому множество всех матриц одинаковой размерности mxn образуют линейное пространство размерности mn. Например, любую квадратную матрицу второго порядка можно разложить в линейную комбинацию 4-х базисных матриц

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $C_{m\times n}=A_{m\times k}\cdot B_{k\times n}$ является ***произведением матриц*** A и B, если ее элементы вычислены по формуле «строка на столбец»:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} . \qquad (3)$$

Операция умножения матриц определена только для согласованных матриц, число столбцов первой из которых равно числу строк второй.

Свойства операции умножения матриц.

1)Умножение матриц ***не коммутативно***

$$AB \neq BA . \qquad (4)$$

Однако, если для каких – либо матриц соотношение $AB = BA$ выполняется, то такие матрицы называются *перестановочными.*

2) Умножение матриц ассоциативно и дистрибутивно:

$$(AB)C=A(BC); \quad (A + B)C = AC + BC; \quad \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

3) Если определено произведение AB, то определено произведение $B^T A^T$ и выполняется равенство:

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Пример 1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha=2$.

Найти $A^T B+\alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 3+1\cdot 2 \\ 0\cdot 1+4\cdot 3-4\cdot 2 \\ 3\cdot 1+1\cdot 3+2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad A^T B+\alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{BA} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\cdot 1 + 4\cdot 4 + 1\cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

1.2. Определитель матрицы

Определитель второго порядка.

$$\det(A_{2\times 2}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (5)$$

Определитель третьего порядка

$$\det(A_{3\times 3}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \qquad (6)$$

Для запоминания формулы гораздо удобнее правило Саррюса или треугольников. Берутся произведения элементов, соединенных линиями со знаком «+» (слева) и со знаком «-» (справа):

Свойства определителей

Свойство 1 («Равноправность строк и столбцов»). Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот: $\det(A) = \det(A^T)$,

Поэтому, в дальнейшем строки и столбцы будем просто называть *рядами определителя.*

Свойство 2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак на противоположный, например

Следствие: определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.

Свойство 3. При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

Следствие: если определитель содержит нулевой ряд, то он равен нулю.

Замечание. При умножении матрицы на число все ее элементы умножаются на это число, поэтому: $\det(\alpha A_{n\times n}) = \alpha^n \det(A_{n\times n})$.

Свойство 4. Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей, например, по первой строке

$$\det(\mathrm{A})=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&4\\3&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&4\\3&2&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&1&2\\2&1&4\\3&2&3\end{vmatrix}=2+8=10; \qquad (7)$$

Свойство 5 («Элементарные преобразования определителя»). Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число, например

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}+k\cdot a_{12}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}+k\cdot a_{22}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}+k\cdot a_{32}\end{vmatrix}.$$

Следствие: если все элементы некоторого ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю.

Свойство 6 («Разложение определителя по элементам некоторого ряда»). Определитель равен сумме произведений элементов определенного ряда на соответствующие им алгебраические дополнения

$$\det(A)=\Delta A=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(-1)^{i+k}M_{ik}\ . \qquad (8)$$

Введем понятия минора и алгебраического дополнения.

Минором M_{ij} некоторого элемента a_{ij} определителя *n-го* порядка называется подопределитель *(n-1)-го* порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Так, если

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\ \text{то}\quad M_{11}=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\ M_{32}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{21}&a_{23}\end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком «плюс», если сумма $i+j$ — четное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечетная:

$$A_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}\cdot M_{ij}. \qquad \text{Например,}\quad A_{11}=M_{11};\ A_{32}=-M_{32}. \qquad (9)$$

Таким образом, свойство 6 позволяет представить определитель *n*-го порядка в виде суммы *n* определителей (*n-1*)-го порядков.

Пример. Вычислите определитель матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение: Для разложения определителя обычно выбирают тот ряд, где есть нулевые элементы, т. к. соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot\left(7\cdot3\cdot4 + (-1)\cdot0\cdot2 + 5\cdot7 - (-1)\cdot3\cdot1 - 7\cdot7\cdot2 - 5\cdot0\cdot4\right) +$$
$$+\left(5\cdot3\cdot4 + (-1)\cdot7\cdot2 + 5\cdot7\cdot8 - (-1)\cdot3\cdot8 - 5\cdot7\cdot4 - 5\cdot7\cdot2\right) -$$
$$-\left(5\cdot0\cdot2 + 7\cdot1\cdot5 + 7\cdot3\cdot8 - 5\cdot0\cdot8 - 3\cdot1\cdot5 - 7\cdot7\cdot2\right) = 122.$$

Следствие: определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

Свойство 7. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю. Так, например,

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0.$$

Свойство 8. $det(AB) = det(A)\cdot det(B)$.

Свойство 9. Если в матрице А строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

1.3. Ранг матрицы

Ранг матрицы – это число линейно независимых столбцов (строк) этой матрицы.

Это означает, что определитель, построенный на этих столбцах (строках) должен быть ненулевым. Поэтому ***ранг матрицы*** – это максимальный из порядков ненулевых миноров, порожденных этой матрицей.

Минором M_S *порядка s* матрицы называется определитель, образованный из элементов этой матрицы, находящихся на пересечении каких - либо выбранных ***s*** строк и ***s*** столбцов.

В матрице размерности $m \times n$ минор порядка r называется **базисным**, если он не равен нулю, а все миноры порядка $r+1$ и выше равны нулю, или не существуют вовсе, например

$$rank\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 2, \text{ т.к. } M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0, \text{ а } M_3 \text{ не существует.}$$

Таким образом, ***r*** не может превышать наименьшее из чисел m или n

$$rank\left(A_{m \times n}\right) \leq \min(m, n). \tag{10}$$

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются *базисными.*

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

Порядок базисного минора матрицы и есть ранг этой матрицы. Ранг вычисляется или *методом окаймляющих миноров*, или *элементарными преобразованиями рядов матрицы*.

Для определения ранга матрицы используют так называемые *элементарные преобразования* строк или столбцов, которые здесь будем называть рядами матрицы.

Элементарные преобразования матрицы, сохраняющие ее ранг:

1) умножение (деление) ряда на число, отличное от нуля;

2) прибавление к элементам одного ряда соответствующих элементов другого ряда, умноженных на произвольное число;

3) перестановка рядов;

4) вычеркивание (удаление) нулевых рядов;

5) транспонирование.

Пример: Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow r = 2.$$

Задачи

1. Найти матрицу X если:

а) $2\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 8 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$; б) $3X + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

2. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти:

а) $2A-B^T$

б) $2B^T+3A$

3. Известно, что а) $A_{5\times9}B_{m\times n}=C_{5\times1}$; б) $A_{5\times m}B_{7\times n}=C_{5\times6}$ Найти m и n.

4. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 9 & -5\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 5 & 6 & 7\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Найти произведение AB, BA, AC.

5. Вычислить определители

$$\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}2 & -2 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 7\\ -3 & 5 & 8\end{vmatrix}=$$

6. Найти все значения α, при которых определители равны нулю:

а) $\begin{vmatrix} 3-\alpha & 0 & 0 \\ 2 & \alpha & 0 \\ 10 & -5 & 1 \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & \alpha \\ \alpha & 0 & 2\alpha^2 \end{vmatrix}$

7. Разложить определитель по 1 столбцу:

$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

8. Вычислить при помощи элементарных преобразований и свойств определителей:

$$\begin{vmatrix} 4 & 13 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 8 & 26 & 0 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & -5 & 6 \\ 5 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -17 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & -8 & 12 \\ 2 & -34 & 4 & 10 \\ 5 & 8 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

9. Вычислить $\det(\alpha A)$, если известно, что $\alpha = 2$ и $\det A_{3\times 3} = 3$.

10. Найти ранг r матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & -17 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & -8 & 12 \\ 2 & -34 & 4 & 10 \\ 5 & 8 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Матричный метод решения СЛАУ. Обратная матрица

Пусть матрица системы является квадратной (число уравнений равно числу неизвестных $m=n$) и невырожденной $(\det(A) \neq 0)$.

В этом случае матричные уравнения имеют и притом единственные решения:

$$\begin{aligned} A \cdot X = B \to X = A^{-1}B \\ X \cdot A = B \to X = BA^{-1} \end{aligned}. \qquad (11)$$

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** для матрицы A, если она удовлетворяет выражениям:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E. \qquad (12)$$

Заметим, что только квадратные, невырожденные $(\det(A) \neq 0)$ матрицы имеют обратную матрицу и притом только одну.

Вычисление обратной матрицы через присоединенную:

1) Вычислить определитель матрицы. Если $\Delta = 0$, обратной матрицы не существует.
2) Найти алгебраические дополнения $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ всех элементов матрицы.
3) Составить матрицу $\tilde{A}$ из этих алгебраических дополнений.
4) Транспонируя полученную матрицу получить присоединенную $\tilde{A}^T$.
5) Разделить присоединенную матрицу на величину определителя Δ.
6) Сделать проверку: $A \cdot A^{-1} = E$.

Таким образом, обратная матрица определяется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}^T, \quad \text{при} \ \det(A) \neq 0. \qquad (13)$$

Пример 1:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} - ?$$

1) $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4\text{-}9) + 1(2 - 12) - 1(3 - 8) = \text{-}25 - 10 + 5 = \text{-}30.$

- обратная матрица существует.

2) Найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -19; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11.$$

3) Составим матрицу из алгебраических дополнений:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -5 & 10 & -5 \\ -1 & 14 & -19 \\ -1 & -16 & 11 \end{pmatrix}$$

4) Транспонируем полученную матрицу и получим присоединенную:

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix};$$

5) Получим A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\tilde{A}^T = \frac{1}{-30}\begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -10 & -14 & 16 \\ 5 & 19 & -11 \end{pmatrix}$$

6) Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -10 & -14 & 16 \\ 5 & 19 & -11 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Вычисление обратной матрицы элементарными преобразованиями:

1) Составить блочную матрицу вида $\left(A \middle| E\right)$.

2) Путем элементарных преобразований строк привести левую часть блочной матрицы к единичной матрице. Тогда в правой ее части получим искомую обратную $\left(E \middle| A^{-1}\right)$.

К элементарным преобразованиям в данном случае относятся:

— умножение всех элементов строки на постоянное число не равное нулю;

— прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на любое число.

Пример 2. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 8\end{pmatrix}.\quad A^{-1}-?$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 8 & 0 & 1\end{array}\right)_{-3\cdot(1c)}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -3 & 1\end{array}\right)_{\div 2}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -3/2 & 1/2\end{array}\right)^{-2\cdot(2c)}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 4 & -1\\ 0 & 1 & -3/2 & 1/2\end{array}\right).$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}.\quad \text{Проверка: } A^{-1}A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Свойства обратных матриц:

$$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A;\quad \left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1};\quad \left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}. \tag{14}$$

Пример 3. Решить систему уравнений матричным методом:

$$\begin{cases}5x-y-z=0\\ x+2y+3z=14\\ 4x+3y+2z=16\end{cases}$$

Запишем систему в матричном виде:

$$AX=B\quad\to\quad\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 14\\ 16\end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}, (см. пример 1).

Найдем вектор X

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}B=A^{-1}=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ -10 & -14 & 16\\ 5 & 19 & -11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 14\\ 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

2.2. Метод Крамера решения СЛАУ

(Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Искомые неизвестные определяются следующим образом:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \;\; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \;\; \ldots \;\; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \qquad (15)$$

Здесь Δ - *главный определитель* системы, $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ - *частные определители* системы, получаемые из главного путем замены соответствующего столбца столбцом свободных членов.

Пример 4. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = -25 – 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 – 48) – (16 – 56) = -100 + 40 = -60.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 – 42) + (16 – 56) = -50 – 40 = -90.$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1; \quad x_2 = \Delta_2/\Delta = 2; \quad x_3 = \Delta_3/\Delta = 3.$

Как видно, результат совпадает с результатом, полученным выше матричным методом.

Задачи

1. Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

2. Найти (методом присоединенной матрицы) матрицу, обратную к данной:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}$$

3.Найти (методом элементарных преобразований) матрицу, обратную к данной

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

4.Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -4\end{pmatrix}$$

5. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$$

6. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6. \end{cases}$$

7. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

8. Решить систему с помощью обратной матрицы $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6. \end{cases}$

2.3. Общая теория СЛАУ

Подпространства матриц

Матричный метод и метод Крамера применимы только к системам с квадратной и невырожденной матрицей, когда число неизвестных равняется числу уравнений и все уравнения линейно независимы. В этом случае система имеет единственное решение и потому называется *определенной*.

Рассмотрим СЛАУ общего вида, т.е. с прямоугольной матрицей, на следующем частном примере

$$A_{m\times n}X_n = B_m; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Данное уравнение можно рассматривать как отображение, которое каждому вектору X_n из n-мерного пространства R^n ставит в соответствие определенный вектор B_m m-мерного пространства R^m. При этом вектор B_m называют образом вектора X_n, а его, в свою очередь, - прообразом B_m. Все множество векторов-образов называется *образом матрицы A* - $\mathrm{Im}(A)$. Это множество является *областью значений E(A) матричного оператора* и представляет собой линейное подпространство пространства R^m, поскольку включает и нулевой вектор: $\mathrm{Im}_m(A_{m\times n}) \subset R^m$. Очевидно, что *множеством определения D(A) матричного оператора* является все линейное пространство R^n: $D(A_{m\times n}) = R^n$.

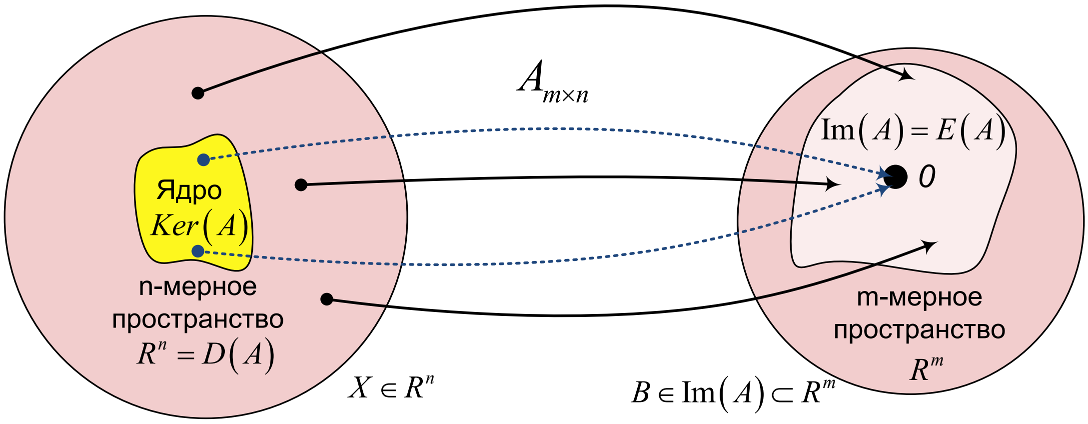


Рисунок - подпространства матрицы $A_{m\times n}$

Образ матрицы совпадает с пространством $Rc(A)$ *ее столбцов:* $\mathrm{Im}(A) = Rc(A)$. Это видно из следующего представления уравнения (16)

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \qquad (17)$$

откуда следует, что вектор B_m является линейной комбинацией столбцов матрицы A.

Нуль-пространством $Z(A)$ матрицы A называется множество решений однородной системы

$$A_{m\times n} X_n = 0_m \text{, например } \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (18)$$

Это множество является линейным подпространством пространства R^n: $Z_n(A_{m\times n}) \subset R^n$. Каждый вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$, принадлежащий этому пространству, преобразуется матричным оператором в нулевой вектор $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ пространства R^m. Нуль-пространство матрицы называется также *ядром* этой матрицы *Ker(A)*, а его размерность – *дефектом* матрицы *dfc(A)*.

Рассматривая матрицу как совокупность строк, из выражения (18) заключаем, что нуль-пространство ортогонально пространству строк $Rl(A)$: $Z_n(A) \perp Rl_n(A)$.

СЛАУ общего вида могут или вовсе не иметь решений (*переопределенные или несовместные системы*) или иметь бесконечное множество решений (*недоопределенные системы*).

Поэтому при решении СЛАУ общего вида необходимо выяснить, совместна ли она, т.е. имеет ли она решения. *Из выражения (17) следует, что столбец свободных членов совместной системы представляет собой линейную комбинацию столбцов матрицы системы. В несовместной системе столбец свободных членов нельзя представить в виде линейной комбинации столбцов матрицы, он линейно независим от столбцов матрицы.* Поэтому вопрос совместности основан на определении рангов основной A и расширенной $A|B$ матриц системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Теорема Кронекера – Капелли (условие совместности системы)

(Леопольд Кронекер (1823-1891) немецкий математик,
Альфре́до Капе́лли (1855 -1910) итальянский математик)

Теорема: *Система совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы*

$$rank\left(A\right)=rank\left(A\middle|B\right). \qquad (19)$$

Если же $rank\left(A\right)<rank\left(A\middle|B\right)$, то система несовместна (переопределенная).

При этом, если равенство (19) выполняется и этот ранг равен числу неизвестных *r(A)=dim(X)*, то система имеет единственное решение (определенная), а если он меньше числа неизвестных *r(A)<dim(X)*, то система имеет бесчисленное множество решений (недоопределенная).

Пример. Определить совместность системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+7x_4+9x_5=1 \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4+5x_5=2 \\ 2x_1+11x_2+12x_3+25x_4+22x_5=4 \end{cases}$$

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix}=1-6=5\neq 0; \quad r(A)=2.$$

$$\mathrm{A|B}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix}$$

$$r(A|B)=3.$$

Система несовместна.

Метод Гаусса

(Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) немецкий математик)

В отличие от матричного метода и метода Крамера, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных с помощью элементарных преобразований строк, к которым относятся:

1) Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.

2)Перестановка уравнений местами.

3)Удаление из системы «нулевых» уравнений, являющихся тождествами для всех x.

Достоинством метода Гаусса является то, что в процессе исключения неизвестных попутно определяется ее совместность. Метод удобнее использовать преобразуя строки расширенной матрицы системы к ступенчатому виду. Эта процедура называется *прямым ходом метода Гаусса*. Последовательное определение неизвестных снизу вверх называется *обратным ходом метода Гаусса*.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Преобразуем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Представим систему в координатной форме:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3; \\ 5x_2 - 7x_3 = 11; \\ -x_3 = -2. \end{cases}$$

Выполним обратный ход метода Гаусса:

— из последнего уравнения найдем $x_3 = 2$;

— подставим $x_3 = 2$ во второе уравнение, из которого найдем $x_2 = 5$;

— подставим $x_3 = 2$, $x_2 = 5$ в первое уравнение, откуда $x_1 = 1$.

Таким образом, $X = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}^T$. Это определенная система.

Задачи

1. Исследовать систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases}$

2. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$

3. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

Фундаментальная система решений

Вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$ будем называть *частным решением* системы линейных уравнений $A_{m\times n}X_n = B_m$, если при подстановке этого вектора в систему получается тождество.

Совокупность всех частных решений системы линейных уравнений назовем *общим решением системы.*

Рассмотрим однородную линейную систему, например, вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (20)$$

Однородная система линейных уравнений всегда совместна, поскольку у нее есть, по крайней мере, одно частное, называемое *тривиальным*, решение, для которого все неизвестные имеют *нулевое значение*. Все решения системы (20) образуют нуль-пространство (ядро) рассматриваемой матрицы A, а его размерность - дефект ν определяется соотношением

$$\nu = n - r. \qquad (21)$$

Покажем это на примере (20). Приведем систему комбинацией строк к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (22)$$

Видно, что *r=2*. Удалим $m-r$ линейно зависимые от базисных строки (3-ю). Выберем *r* базисных, линейно независимых столбцов – например, 1-й и 3-й. Им соответствуют *r* базисных переменных – x_1, x_3. Остальные $n-r$ переменные, в нашем случае $-x_2, x_4$, будем называть *свободными (независимыми)*. Перенесем их в правую часть системы, получим

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = -3x_2 - 2x_4; \\ 3x_3 = -x_4, \end{cases}$$

или в матричном виде

$$A^b_{r\times r}X_r^{\,b} = A^f_{(m-r)\times(n-r)}X^f_{n-r}, \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}. \qquad (23)$$

Получившаяся система является системой «Крамеровского» типа с квадратной невырожденной матрицей $A^b_{r\times r}$, а потому ее можно решать любым известным способом, например матричным:

$$X_r^{\,b} = \left(A^b_{r\times r}\right)^{-1} A^f_{(m-r)\times(n-r)} X^f_{n-r},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}. \qquad (24)$$

Полагая вектор свободных переменных $\begin{pmatrix} x_2 & x_4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}^T$, где c_1, c_2 - произвольные величины, получим общее решение однородной системы (20)

$$\begin{cases} x_1 = -3c_1 - c_2; \\ x_2 = c_1; \\ x_3 = -1/3c_2; \\ x_4 = c_2. \end{cases} \quad \to \quad X_n = F_{n\times(n-r)} C_{n-r}; \quad \to \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad (25)$$

Матрица $F_{n\times(n-r)}$ называется *фундаментальной системой решений* (ФСР) однородной системы уравнений *(20). Она образована $n-r$ вектор-столбцами, которые являются линейно независимыми частными решениями однородной системы, и представляют собой базис нуль-пространства (ядра) матрицы А*. Линейная оболочка этих векторов (множество всех их линейных комбинаций) является общим решением рассматриваемой однородной системы уравнений (20).

Фундаментальная система решений называется *нормальной* (как в выражении (25)), если она образована решениями системы, при которых вектор свободных переменных последовательно принимает значения столбцов единичной матрицы.

Таким образом, общее решение однородной системы линейных уравнений (20) представляет собой линейную оболочку векторов фундаментальной системы решений.

Решение неоднородной СЛАУ

Рассмотрим неоднородную СЛАУ, например вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \qquad (26)$$

Будем полагать, что система (26) совместна.

Общее решение неоднородной системы уравнений представляет собой сумму общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной.

$$X_{неоднород} = X_{однор} + X_{частное}$$

Как и для однородного случая, приведем систему (26) комбинацией строк к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - 2b_2 + 5b_1 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Если система совместна, то, очевидно, должно выполняться условие $b_3 - 2b_2 + 5b_1 = 0$, тогда последнее уравнение (27) становится тождеством 0=0, и его можно отбросить.

Далее действуем, как и в случае с однородной системой. В результате получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b_1 - b_2 \\ (b_2 - 2b_1)\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b_1 - b_2 \\ 0 \\ 1/3(b_2 - 2b_1) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} c_2. \tag{28}$$

Сравнивая это решение с решением однородной системы (25), мы видим, что оно отличается от общего решения однородной системы только одним слагаемым – частным решением неоднородной системы.

Решение несовместных СЛАУ по МНК

В завершении этого раздела рассмотрим случай несовместной СЛАУ. Такие системы уравнений часто возникают на практике, когда необходимо оценить некоторый вектор X неизвестных параметров по результатам большого количества неточных измерений. В этом случае в системе $A_{m\times n} X_n = B_m$ число уравнений, т.е. ограничений, накладываемых на переменные, превышает число неизвестных m>n, и система становится переопределенной.

Точного решения X не существует, однако можно получить некоторую оценку X^* этого решения, которая дает наиболее близкий, в определенном смысле, к вектору B вектор AX^*. На практике получил широкое распространение метод наименьших квадратов (МНК). Оценка X^*, оптимальная в смысле МНК, удовлетворяет условию минимума суммы квадратов разностей

$$\left(B - AX^*\right)^T \left(B - AX^*\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(b_i - Ax_i^*\right)^2 \to \min . \qquad (29)$$

В результате минимизации выражения (29), получим следующую оптимальную в указанном выше смысле оценку решения несовместной СЛАУ

$$X^* = \left(AA^T\right)^{-1} A^T B . \qquad (30)$$

Задачи

1. Найти общее решение системы линейных уравнений

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

3. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть даны два линейных пространства *X* и *Y*, размерности которых равны соответственно *m* и *n*.

Оператором f, действующим из X в Y (или отображением f пространства X на Y), называется правило, в соответствии с которым каждому $x \in X$ *ставится в соответствие единственный элемент* $y \in Y$ *. Обозначается* $f : X \to Y$.

Вектор $y \in Y$ называется *образом* элемента $x \in X$, а вектор $x \in X$ - *прообразом* элемента $y \in Y$. Оператор f переводит вектор x в y и обозначается $y = f(x)$.

Из определения следует, что у каждого элемента $x \in X$ есть образ $y \in Y$, но не каждый элемент $y \in Y$ имеет прообраз $x \in X$. Исключаем из рассмотрения также многозначные операторы, для которых одному образу может соответствовать несколько различных прообразов.

Таким образом, оператор является обобщением понятия функции на случай, когда аргументом выступают элементы произвольного линейного (векторного) пространства, а не только множество действительных чисел.

Отображение $f : X \to Y$ называется *взаимно однозначным*, если каждый элемент $y \in Y$ имеет прообраз $x \in X$, и притом только единственный.

Пример отображения. Зададим точку *O* на плоскости *P* и сопоставим каждому вектору $\overrightarrow{OM}$ такой вектор $f\left(\overrightarrow{OM}\right)$, что

$$f\left(\overrightarrow{OM}\right) = \frac{\overrightarrow{OM}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|} arctg\left|\overrightarrow{OM}\right|. \tag{31}$$

Положим $f(O) = 0$. При этом каждой точке плоскости *P* сопоставляется единственная точка внутри круга радиуса $\pi/2$ с центром в точке О. Каждая точка, лежащая внутри круга, имеет единственный прообраз, а точки, не лежащие внутри круга, не имеют прообразов.

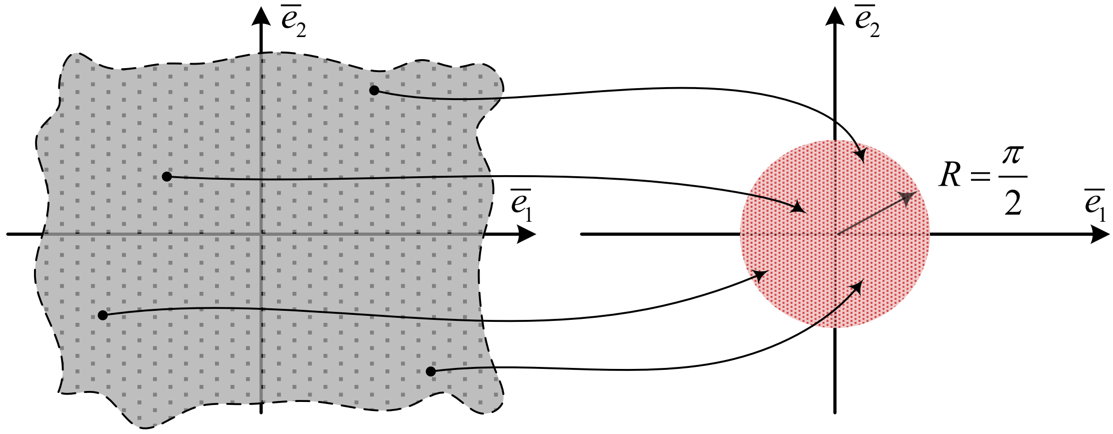


Рисунок 1 – Геометрическая интерпретация нелинейного отображения

Среди множества операторов особое место занимают линейные, рассмотрением которых займемся в дальнейшем.

Оператор (отображение) $f: X \to Y$ *называется линейным, если для любых элементов* $a, b \in X$ *и любой постоянной с отображение линейной комбинации есть та же линейная комбинация отображений – принцип суперпозиции:*

$$f(\alpha \cdot a + \beta \cdot b) = \alpha \cdot f(a) + \beta \cdot f(b). \qquad (32)$$

Если пространства X и Y совпадают, то оператор f, действующий из X в X, называется *преобразованием* пространства X.

Оператор называется *тождественным*, если он преобразует элемент линейного пространства сам в себя.

$$f(x) = x, \qquad \forall x \in X .$$

Отображение, представленное на рисунке 1, нелинейное, т.к., например,

$$arctg\left|2 \cdot \overrightarrow{OM}\right| \neq 2 \cdot arctg\left|\overrightarrow{OM}\right|.$$

3.1. Координатное представление линейного оператора

Пусть линейный оператор $f: P_x \to P_y$ выполняет преобразование плоскости P_x (входного пространства) в плоскость P_y (выходное пространство). Тогда он преобразует каждый вектор-прообраз $\overline{x}$ плоскости P_x в вектор-образ $\overline{y}$ плоскости P_y. В частности базисные геометрические векторы $\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2$ плоскости P_x в их образы – базисные векторы $\overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2$ плоскости P_y:

$$\overline{y} = f(\overline{x}) \quad \to \quad \overline{\eta}_1 = f(\overline{\xi}_1); \qquad \overline{\eta}_2 = f(\overline{\xi}_2). \qquad (33)$$

Любой вектор линейного пространства является линейной комбинацией базисных векторов

$$\bar{x} = \bar{\xi}_1 x_{\xi 1} + \bar{\xi}_2 x_{\xi 2} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_1 & \bar{\xi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\xi 1} \\ x_{\xi 2} \end{pmatrix}; \qquad \bar{y} = \bar{\eta}_1 y_{\eta 1} + \bar{\eta}_2 y_{\eta 2} = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_1 & \bar{\eta}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{\eta 1} \\ y_{\eta 2} \end{pmatrix}. \qquad (34)$$

Выполним преобразование вектора $\bar{x}$, учитывая линейность оператора (32). Тогда образ $\bar{y}$ вектора $\bar{x}$ примет вид:

$$\begin{aligned} \bar{y} = f(\bar{x}) = f\left(\bar{\xi}_1 x_{\xi 1} + \bar{\xi}_2 x_{\xi 2}\right) = f\left(\bar{\xi}_1\right) x_{\xi 1} + f\left(\bar{\xi}_2\right) x_{\xi 2} = \\ = \bar{\eta}_1 x_{\xi 1} + \bar{\eta}_2 x_{\xi 2} = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_1 & \bar{\eta}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\xi 1} \\ x_{\xi 2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \qquad (35)$$

Из выражений (34) - (35) в отношении линейного преобразования заключаем:

1) координатный столбец вектора-образа $\bar{y}$ в новом базисе $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ равен координатному столбцу вектора-прообраза $\bar{x}$ в старом базисе $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$ (рис.2):

$$\begin{pmatrix} y_{\eta 1} \\ y_{\eta 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\xi 1} \\ x_{\xi 2} \end{pmatrix}; \qquad (36)$$

2) линейный оператор полностью задан, если заданы образы базисных векторов.

Поскольку мы рассматриваем *линейные* отображения (операторы) *f*, то *образы* $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ базисных векторов $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$ представляют собой их линейные комбинации, например для 2-мерного пространства:

$$\bar{\eta}_1 = f\left(\bar{\xi}_1\right) = a_{11}\bar{\xi}_1 + a_{21}\bar{\xi}_2; \qquad \bar{\eta}_2 = f\left(\bar{\xi}_2\right) = a_{12}\bar{\xi}_1 + a_{22}\bar{\xi}_2, \qquad (37)$$

или в матричной форме записи:

$$\begin{pmatrix} \bar{\eta}_1 & \bar{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_1 & \bar{\xi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_1 & \bar{\xi}_2 \end{pmatrix} A. \qquad (38)$$

Матрица A называется матрицей линейного оператора в базисе $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$. Столбцы этой матрицы суть координатные столбцы образов $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ базисных векторов $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$ в исходном базисе.

Таким образом, каждому линейному оператору f соответствует матрица в данном базисе. И наоборот, каждая матрица соответствует некоторому линейному оператору в данном базисе.

Определим *координаты вектора-образа $\bar{y}$ в исходном (старом) базисе* $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$. Используя (36) и (38), имеем:

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_1 & \bar{\eta}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{\eta 1} \\ y_{\eta 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_1 & \bar{\eta}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\xi 1} \\ x_{\xi 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_1 & \bar{\xi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\xi 1} \\ x_{\xi 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_1 & \bar{\xi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{\xi 1} \\ y_{\xi 2} \end{pmatrix},$$

откуда ***координаты вектора-образа*** $\overline{y}$ ***в исходном (старом) базисе***

$$\begin{pmatrix} y_{\xi 1} \\ y_{\xi 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\xi 1} \\ x_{\xi 2} \end{pmatrix}, \quad \text{или } y_\xi = A_\xi x_\xi . \qquad (39)$$

Выражение (39) определяет ***правило преобразования оператором A*** алгебраических векторов – координатных столбцов в старом базисе $\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2$.

Пример. Рассмотрим оператор вращения, который поворачивает всю плоскость как твердое тело на угол α. При этом каждый вектор плоскости поворачивается на угол α.

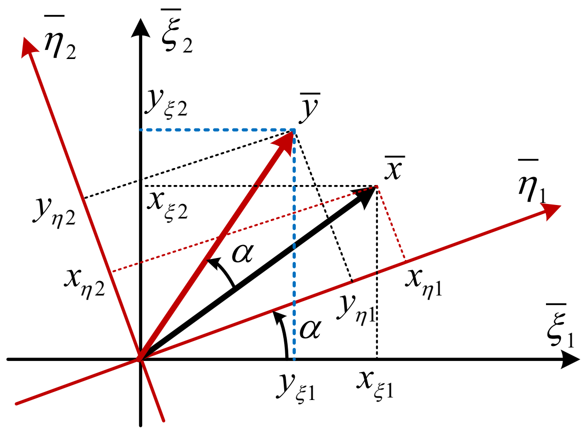


Рисунок 2 – Преобразование плоскости вращением

Определим матрицу A этого оператора. Для этого найдем координаты новых базисных векторов $\overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2$ в старом базисе $\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2$:

$$\overline{\eta}_1 = f\left(\overline{\xi}_1\right) = \overline{\xi}_1 \cos\alpha + \overline{\xi}_2 \sin\alpha;$$
$$\overline{\eta}_2 = f\left(\overline{\xi}_2\right) = -\overline{\xi}_1 \sin\alpha + \overline{\xi}_2 \cos\alpha,$$

откуда

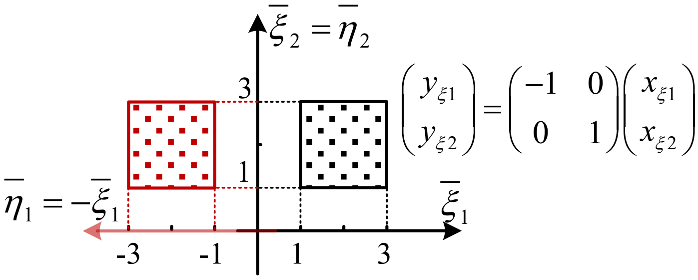
$$\left(\overline{\eta}_1 \quad \overline{\eta}_2\right) = \left(\overline{\xi}_1 \quad \overline{\xi}_2\right) \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \qquad (40)$$

Матрица A является формой представления линейного оператора поворота в базисе $\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2$. При этом, преобразование координатных столбцов выполняется по правилу (39)

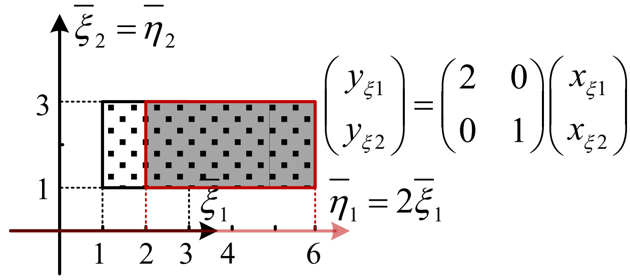
$$y_\xi = A_\xi x_\xi \qquad \text{или} \qquad \begin{pmatrix} y_{\xi 1} \\ y_{\xi 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\xi 1} \\ x_{\xi 2} \end{pmatrix}. \qquad (41)$$

Ниже будет решена *задача преобразования координат* (см. (49)), когда координаты вектора $\overline{x}$ в новом базисе $\begin{pmatrix} x_{\eta 1} & x_{\eta 2} \end{pmatrix}^T$ выражают через координаты этого же вектора в старом базисе $\begin{pmatrix} x_{\xi 1} & x_{\xi 2} \end{pmatrix}^T$.

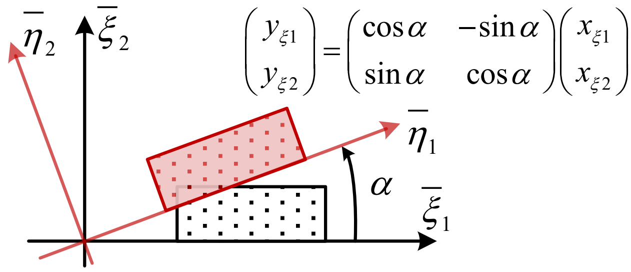
Примеры линейных преобразований плоскости представлены на рисунках



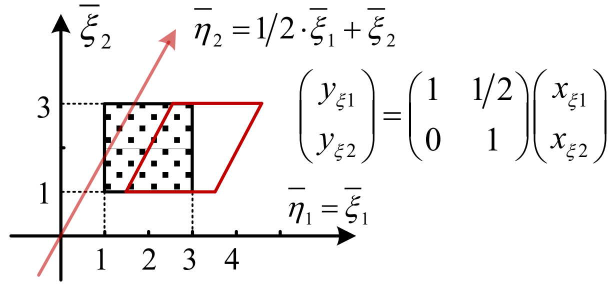
а) – Отражение оси OX



б) – Растяжение вдоль оси OX



в) – Поворот плоскости



г) – Скос вдоль оси OX

Рисунок 3 - Примеры линейных преобразований плоскости

Линейные преобразования f называются ***ортогональными***, если они не меняют расстояния между любыми двумя точками пространства. Пространство остается «твердым, застывшим» и для любых его точек A и B выполняется

$$\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{f(A) f(B)}\right|. \tag{42}$$

К ортогональным относят тождественное преобразование, отражение (а), вращение (в) и параллельный перенос.

Определитель матрицы ортогонального оператора равен единице

$$\det\left(A_{ort}\right) = 1; \quad A^T A = E. \tag{43}$$

Взаимно однозначное линейное преобразование называется ***аффинным,*** если оно прямые отрезки преобразует в прямые же отрезки. При этом не обязательно сохраняются длины отрезков, но сохраняются пропорции их деления. Пространство уже не является «затвердевшим», оно деформируется так, что для любых точек A, B и C, лежащих на произвольной прямой пространства, выполняется

$$\frac{\left|\overline{AB}\right|}{\left|\overline{BC}\right|}=\frac{\left|\overline{f(A)f(B)}\right|}{\left|\overline{f(B)f(C)}\right|}. \qquad (44)$$

Аффинными являются преобразования (б) и (г). Они обеспечивают линейную деформацию геометрических объектов - сжатие или скос, при этом площади (объемы) этих объектов изменяются. Очевидно, что ортогональное преобразование является частным случаем аффинного.

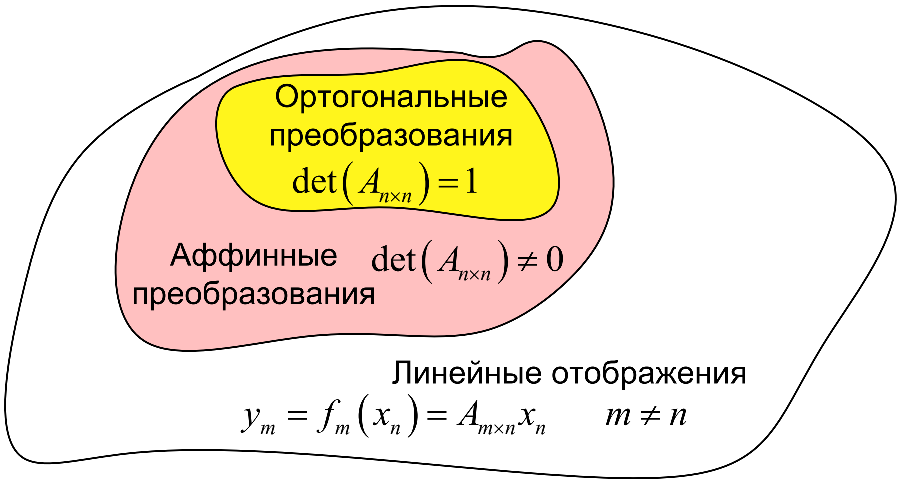


Рисунок 4 – Классификация линейных операторов

Матрица аффинного оператора невырождена

$$\det\left(A_{af}\right)\neq 0. \qquad (45)$$

Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ - два произвольных не коллинеарных вектора на плоскости. Их координатные столбцы обозначим $a=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\end{pmatrix}^T$ и $b=\begin{pmatrix}b_1 & b_2\end{pmatrix}^T$. Пусть этим векторам соответствуют их образы $\overline{a}^*$ и $\overline{b}^*$ с координатными столбцами $a^*=\begin{pmatrix}a_1^* & a_2^*\end{pmatrix}^T$ и $b^*=\begin{pmatrix}b_1^* & b_2^*\end{pmatrix}^T$, полученные аффинным преобразованием с матрицей A.

Матрицы, составленные из этих координатных столбцов, с учетом (39) примут вид

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}a_1^* & b_1^*\\ a_2^* & b_1^*\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}.$$

Из свойств определителя второго порядка получим ориентированные площади параллелограммов, построенных на соответствующих векторах

$$S_p=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix};\quad S_p^*=\begin{vmatrix}a_1^* & b_1^*\\ a_2^* & b_1^*\end{vmatrix}=\left|A\right|\cdot\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=\left|A\right|\cdot S_p,$$

откуда

$$\frac{S_p^*}{S_p} = \det(A). \qquad (46)$$

Таким образом, ***геометрический смысл определителя матрицы аффинного преобразования*** *– отношение ориентированной площади параллелограмма-образа к ориентированной площади параллелограмма-прообраза, построенных на соответствующих векторах.*

Результат последовательного выполнения двух отображений называется ***произведением преобразований***

$$f(x) \to Ax; \qquad g(x) \to Bx;$$

$$f(g(x)) \to (A \cdot B)x \neq (B \cdot A)x$$

Для каждого взаимно однозначного (аффинного) преобразования f существует *обратное преобразование* f^{-1}, такое, что $f^{-1}(f(x)) \to E$, где – E тождественное преобразование.

$$f(x) \to Ax; \qquad f^{-1}(x) \to A^{-1}x; \qquad f^{-1}(f(x)) \to A^{-1}Ax = Ex = x.$$

Произведение линейных преобразований является линейным преобразованием. Произведение аффинных преобразований — аффинное преобразование. Преобразование, обратное аффинному преобразованию, также является аффинным.

Доказывается, что каждое ортогональное преобразование раскладывается в произведение параллельного переноса, поворота и, возможно, отражения.

Каждое аффинное преобразование плоскости раскладывается в произведение ортогонального преобразования и двух сжатий к двум взаимно перпендикулярным прямым.

3.2. Преобразование координат вектора при замене базиса

Пусть вектор $\overline{x}$ разложен по базисным векторам линейного, например 2-мерного, пространства $\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2$ как показано на рисунке 2. Этот же вектор $\overline{x}$ можно представить в виде линейной комбинации новых базисных векторов $\overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2$. Тогда должны выполняться равенства:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} \overline{\xi}_1 & \overline{\xi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\xi 1} \\ x_{\xi 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\eta}_1 & \overline{\eta}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\eta 1} \\ x_{\eta 2} \end{pmatrix}. \qquad (47)$$

Пусть новый базис $\overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2$ является линейным преобразованием старого $\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2$ (38) с невырожденной матрицей S

$$\begin{pmatrix} \overline{\eta}_1 & \overline{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\xi}_1 & \overline{\xi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\xi}_1 & \overline{\xi}_2 \end{pmatrix} S. \qquad (48)$$

Объединяя эти выражения, получим

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} \overline{\eta}_1 & \overline{\eta}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\eta 1} \\ x_{\eta 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\xi}_1 & \overline{\xi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\eta 1} \\ x_{\eta 2} \end{pmatrix},$$

откуда получим ***формулы преобразование координат вектора при замене базиса***

$$\begin{pmatrix} x_{\xi 1} \\ x_{\xi 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\eta 1} \\ x_{\eta 2} \end{pmatrix}; \qquad x_{\xi} = S x_{\eta}; \qquad x_{\eta} = S^{-1} x_{\xi}. \qquad (49)$$

Здесь x_{ξ} и x_{η} - координатные столбцы вектора x в старом и новом базисах соответственно; S - матрица преобразования координат составленная из координатных столбцов новых базисных векторов в старом базисе.

Для примера, представленного на рисунке 2, получим (40)

$$\begin{pmatrix} \overline{\eta}_1 & \overline{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\xi}_1 & \overline{\xi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{pmatrix} x_{\eta 1} \\ x_{\eta 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_{\xi 1} \\ x_{\xi 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\xi 1} \\ x_{\xi 2} \end{pmatrix}. \qquad (50)$$

Из рисунка 2 видно, что такое преобразование является обратным к (41), т.е. поворот выполняется на угол $(-\alpha)$. В первом случае вся плоскость (линейное пространство) повернулась на угол α, при неподвижной системе координат $\xi_1 O \xi_2$. Во втором – наоборот, на угол α повернулась система координат $\xi_1 O \xi_2 \to \eta_1 O \eta_2$, относительно неподвижной плоскости. А это, очевидно, эквивалентно повороту плоскости на угол $(-\alpha)$ относительно неподвижной системы координат.

3.3. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Пусть линейный оператор f задан в базисе ξ матрицей A_{ξ}, следующим образом, см. (39), $y_{\xi} = A_{\xi} x_{\xi}$.

В новом базисе η этот же оператор f примет вид $y_{\eta} = A_{\eta} x_{\eta}$. Установим связь между матрицами оператора в двух базисах, если известна матрица S преобразования координат.

На основании (49) получим $x_{\eta} = S^{-1} x_{\xi}; \qquad y_{\eta} = S^{-1} y_{\xi}$, тогда

$$S^{-1} y_{\xi} = A_{\eta} S^{-1} x_{\xi} \qquad \to \qquad y_{\xi} = S A_{\eta} S^{-1} x_{\xi},$$ откуда

$$A_\xi = SA_\eta S^{-1} \quad \rightarrow \quad A_\eta = S^{-1} A_\xi S. \tag{51}$$

Формулы (51) определяют ***правила преобразования оператора при переходе от старого ξ базиса к новому η и наоборот***.

Матрицы, связанные зависимостью (51), называются *подобными*.

При этом, определитель матрицы линейного преобразования не зависит от выбора базиса

$$\det\left(A_\xi\right) = \det\left(SA_\eta S^{-1}\right) = \det\left(S\right)\cdot\det\left(A_\eta\right)\cdot\det\left(S^{-1}\right) = \det\left(A_\eta\right). \tag{52}$$

Пример 1. Найти матрицу линейного преобразования (см. (39)):

$$\begin{array}{lll} x' = x + y; & x' = 1\cdot x + 1\cdot y + 0\cdot z; & \\ y' = y + z; & y' = 0\cdot x + 1\cdot y + 1\cdot z; & \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \\ z' = z + x. & z' = 1\cdot x + 0\cdot y + 1\cdot z. & \end{array}$$

Пример 2. Задано линейное преобразование A, переводящее вектор x в вектор y и линейное преобразование B, переводящее вектор y в вектор z. Найти матрицу линейного преобразования, переводящего вектор x в вектор z.

$$y = A(x) = (2x_1 - x_2 + 5x_3; x_1 + 4x_2 - x_3; 3x_1 - 5x_2 + 2x_3);$$

$$z = B(y) = (y_1 + 4y_2 + 3y_3; 5y_1 - y_2 - y_3; 3y_1 + 6y_2 + 7y_3).$$

$$x \xrightarrow{A} y \xrightarrow{B} z \qquad y = Ax; \quad z = By = BAx$$

$$x \xrightarrow{C} z \qquad z = Cx \rightarrow \quad C = BA$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = BA = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 7 \\ 6 & -4 & 24 \\ 33 & -14 & 23 \end{pmatrix}.$$

т.е. $z = C(x) = (15x_1 + 7x_3; 6x_1 - 4x_2 + 24x_3; 33x_1 - 14x_2 + 23x_3)$.

<u>Примечание:</u> Если $|\mathrm{A}| = 0$, то преобразование вырожденное, т.е., например, плоскость преобразуется не в целую плоскость, а в прямую.

Пример 3. Проверить линейность оператора. Найти образ Im(A) и базис в нем. Определить ядро Ker(A) и базис в нем.

$$A(x) = (-x_1 + 3x_3; 2x_1 + 4x_2 + x_3; x_1 + 4x_2 + 4x_3); \quad x = (x_1; x_2; x_3).$$

Если оператор можно представить в матричном виде, то он - линейный.

$$A(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ - линейный оператор.}$$

Образ линейного оператора Im(A) - это множество его возможных значений, определяемое как линейная оболочка его столбцов

$$A(x)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}0\\ 4\\ 4\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 4\end{pmatrix}x_3.$$

Линейной комбинацией столбцов определим размерность Im(A)

$$rank\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 4 & 4\end{pmatrix}=rank\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 7\\ 1 & 4 & 7\end{pmatrix}=rank\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=2. \quad \dim(\mathrm{Im}(A))=2.$$

Пространство столбцов порождается двумя линейно независимыми векторами, которые можно взять в качестве базиса образа оператора Im(A).

Ядро Ker(A) или нуль-пространство оператора представляет собой множество векторов *x*, которые оператор отображает в нулевой вектор. Это множество получим решив однородную систему

$$A(x)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Комбинируя строки получим

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 0 & 4 & 7\\ 0 & 4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 0 & 4 & 7\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Удалим нулевую строку и перенесем x_3 вправо, получим

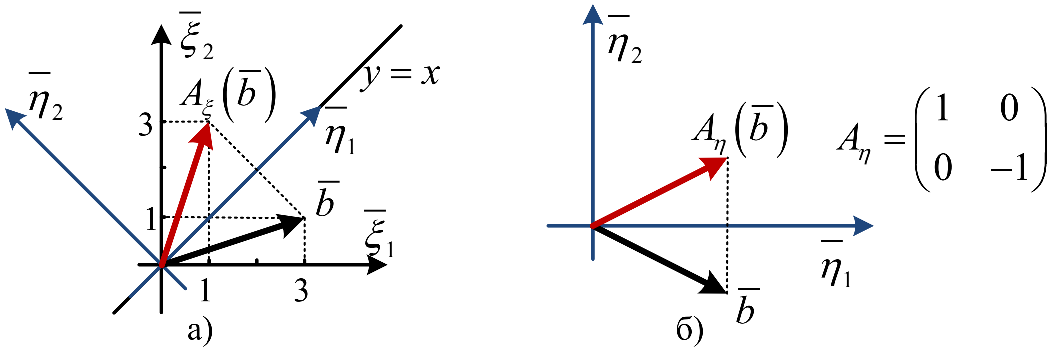
$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ -7\end{pmatrix}x_3;\quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -7/4\end{pmatrix}x_3;\quad \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -7/4\\ 1\end{pmatrix}c.$$

Ядро Ker(A) оператора представляет собой одномерное линейное пространство - линию с одним базисным вектором.

Пример 4. Найти матрицу преобразования, которое обеспечивает отражение плоскости относительно прямой *y=x*. Построить вектор *b(3;1)* и его образ.

Решение.

Отражение плоскости относительно прямой *y=x* показано на рисунке а).



Рисунок

Весьма просто задается оператор отражения плоскости относительно оси абсцисс в новой системе координат $O\eta_1\eta_2$, как показано на рисунке б).

Чтобы получить оператор заданного отражения преобразуем его в старую систему координат $O\xi_1\xi_2$ по формуле (51).

Новая система координат $O\eta_1\eta_2$ очевидно развернута относительно старой $O\xi_1\xi_2$ на угол в 45^0. Матрицу перехода к новой системе координат составим из координатных столбцов новых базисных векторов

$$S = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

На основании (51) получим искомую форму оператора в системе $O\xi_1\xi_2$

$$A_\xi = SA_\eta S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем образ вектора $b(3;1)$: $\quad A_\xi(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Таким образом, оператор меняет местами координаты x и y.

Задачи

1. Исследовать, являются ли линейными операторы:
$A(x) = (x_1, x_1 - x_3, x_2 + x_3)$, $B(x) = (1, x_1 - x_3, x_2 + x_3)$, $C(x) = (x_1^2, x_1 - x_3, x_2 + x_3)$.
Если оператор линейный, построить матрицу этого оператора.

2. Проверить линейность оператора. Найти образ Im(A) и базис в нем. Определить ядро Ker(A) и базис в нем.

$A(x) = A(x_1 + 2x_2 + x_3; -x_1 + x_3; 2x_1 + x_2 - x_3)$; $\quad x = (x_1; x_2; x_3)$.

3. Проверить линейность оператора $A(x)=(x,a)\frac{a}{|a|^2}$, a=(1;2;3). Найти его образ Im(A) и ядро Ker(A). Выяснить геометрический смысл оператора.

4. Найти матрицу преобразования, которое обеспечивает растяжение всех векторов плоскости в k раз. Построить векторы a(4;1), b(-2;2) и их образы для k=2. Вычислить площади параллелограммов, которые они образуют.

5. Найти матрицу преобразования, которое обеспечивает сжатие плоскости к оси OX в 2 раза и ее растяжение вдоль OY в 3 раза. Построить векторы a(4;1), b(-2;2) и их образы. Вычислить площади параллелограммов, которые они образуют.

6. Найти матрицу преобразования, которое обеспечивает параллельный перенос пространства на вектор p=(2;3). Проверить его линейность. Построить векторы a(4;1), b(-2;2) и их образы. Вычислить площади параллелограммов, которые они образуют.

7. Матрицы преобразований имеют вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Построить векторы a(2;0), b(0;2) и их образы. Найти образ и ядро оператора, заданного матрицей A, их базисы.

8. Найти координаты вектора $x=\{1,-2,3\}$. в базисе (e_1',e_2',e_3'), если он задан в базисе (e_1,e_2,e_3).

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 11e_3, \\ e_2' = \dfrac{11}{10}e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$$

9. Найти матрицу линейного оператора $A_{e'}$ в базисе (e_1',e_2'), где $e_1' = e_1 - e_2, e_2' = -e_1 + e_2$, если она задана в базисе (e_1,e_2) $A_e = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.4. Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования

Пусть L – заданное n- мерное линейное пространство. Ненулевой вектор $x \in L$ называется **собственным вектором** линейного преобразования A, если существует такое число λ, что выполняется равенство:

$$Ax = \lambda x \quad \text{или} \quad (A - \lambda E)x = 0. \tag{53}$$

При этом число λ называется **собственным значением (характеристическим числом)** линейного преобразования A, соответствующего вектору x.

Пример 1. Пусть линейный оператор f линейного двумерного пространства в базисе e_1,e_2 имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор $x = \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}^T$ является собственным вектором этого оператора с собственным значением $k = -1$.

Действительно, вектор x ненулевой и

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -x, \quad \text{т.е. } f(x) = -x.$$

Матричное уравнение (53) имеет нетривиальные решения, только когда определитель равен нулю

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{54}$$

Раскрыв его получим алгебраическое уравнение n-го порядка

$$(-1)^n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0. \tag{55}$$

Это уравнение называется **характеристическим уравнением,** а его левая часть - **характеристическим многочленом** линейного преобразования A.

Характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от выбора базиса, так для подобных матриц $B = S^{-1}AS$ имеем:

$$|B - \lambda E| = |S^{-1}AS - \lambda E| = |S^{-1}AS - \lambda S^{-1}ES| =$$

$$= |S^{-1}(A - \lambda E)S| = |S^{-1}||A - \lambda E||S| = |A - \lambda E|.$$

Матрицы B и A имеют одинаковые характеристические многочлены, а значит и собственные числа.

Если характеристическое уравнение не имеет действительных корней, что может случиться при четной размерности многочлена, то линейное преобразование A не имеет ни одного вещественного корня, и, следовательно, линейное преобразование не имеет собственных значений и собственных векторов. Примером может служить поворот плоскости на угол $\alpha \neq k\pi, k \in Z$.

Характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ***оператора определяются из характеристического уравнения (54)*** $\det\left(A - \lambda E\right) = 0$**.**

Для определения собственных векторов, точнее собственных подпространств, теперь ***необходимо для каждого из*** $\lambda_i, i = \overline{1,n}$ ***решить однородную систему линейных уравнений*** (53)

$$\left(A - \lambda_i E\right)x = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (56)$$

Фундаментальные системы решений этих линейных систем образуют базисы собственных подпространств чисел λ_i. В простейшем случае собственное подпространство одномерное. Геометрически оно представляет собой прямую, проходящую через начало координат. Любой вектор этой прямой является собственным вектором данного собственного числа λ_i. Размерность собственного подпространства числа λ_i называется ***геометрической кратностью*** этого числа. ***Алгебраической кратностью*** собственного числа называется его кратность, как корня характеристического уравнения. Геометрическая кратность не превышает алгебраической.

Множество всех собственных чисел оператора называется его *спектром*.

Пример 2. Найти собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Решение.* Характеристическое уравнение данного оператора имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Корни этого уравнения следующие: $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$. Один из корней имеет алгебраическую кратность 2.

2. Все корни являются собственными значениями.

3. Чтобы найти собственное подпространство собственного значения $\lambda_{1,2}=9$, полагаем в системе $\left(A-\lambda E\right)x=0 \quad \lambda=9$. Получаем из (56):

$$\left.\begin{aligned} -8x_1-4x_2-8x_3=0; \\ -4x_1-2x_2-4x_3=0; \\ -8x_1-4x_2-8x_3=0. \end{aligned}\right\} \quad \to \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 \\ -2C_1-2C_2 \\ C_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

4. Собственное подпространство двумерное. Значит, геометрическая кратность значения $\lambda_{1,2}=9$ совпадает с алгебраической и равна двум. Любой вектор $x=\begin{pmatrix} C_1 & 2C_1-2C_2 & C_2 \end{pmatrix}^T$, где C_1, C_2 - любые числа, удовлетворяющие условию $C_1^2+C_2^2\neq 0$, является собственным вектором данного оператора с собственным значением $\lambda=9$.

Аналогично находим, что вектор $y=t\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$, где t – любое отличное от нуля число, является собственным вектором данного оператора с собственным значением $\lambda_3=-9$.

Пример 3. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей A = $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. rangA=2.

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -4 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix}=-(6-\lambda)(2+\lambda)+16=-12-6\lambda+2\lambda+\lambda^2+16=0$$

$$\lambda^2-4\lambda+4=0;$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1=\lambda_2=2$;

На основании (56) получаем: $\begin{cases} (6-2)x_1-4x_2=0 \\ 4x_1-4x_2=0 \end{cases}$

Из системы получается зависимость: $x_1-x_2=0$. Собственные векторы для двукратного корня характеристического уравнения имеют координаты: *(t; t)* где *t*- параметр.

Собственное подпространство одномерное с базисным вектором: $V=t\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$.

Здесь алгебраическая кратность превышает геометрическую. А матрица имеет лишь один собственный вектор.

Пример 4. Докажите, что вектор $x=(1,2,1)^T$ является собственным для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix}$, и найдите соответствующее ему собственное число. Найдите другие собственные числа и отвечающие им собственные векторы. (rangA=3)

Решение. Имеем

$$Ax=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-6+4\\ 4-14+8\\ 6-14+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ -1\end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что вектор $x=(1,2,1)^T$ собственный и отвечает собственному числу $\lambda=-1$.

Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -3 & 4\\ 4 & -7-\lambda & 8\\ 6 & -7 & 7-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Вычисляя этот определитель, получим $(\lambda+1)^2(\lambda-3)=0,\ \lambda_1=-1,\ \lambda_2=3.$

Запишем систему для определения собственного вектора, отвечающего собственному числу $\lambda=3$:

$$\begin{cases}-2x_1-3x_2+4x_3=0,\\ 4x_1-10x_2+8x_3=0,\\ 6x_1-7x_2+4x_3=0.\end{cases}$$

Третье уравнение равно разности второго и первого, поэтому его можно вычеркнуть из системы. Мы получили систему с $rang(A-\lambda E)=2$

$$\begin{cases}-2x_1-3x_2+4x_3=0,\\ 2x_1-5x_2+4x_3=0.\end{cases}$$

В качестве свободного неизвестного можно выбрать x_3 и выразить через него неизвестные x_1 и x_2. Получим

$$x_1=\frac{1}{2}x_3,x_2=x_3;\quad (x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{1}{2},1,1\right)t$$

Полагая $x_3=2$, найдем собственный вектор $(1,2,2)$. Проверка:

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-6+8\\ 4-14+16\\ 6-14+14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 6\\ 6\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix},$$

Следовательно, вектор $x = (1,2,2)^T$ собственный и отвечает собственному числу $\lambda = 3$. Собственными векторами, отвечающими числу $\lambda = 3$, будут и векторы $(1,2,2)^T t$, где $t \neq 0$. Если x – собственный вектор, то tx при $t \neq 0$ - тоже собственный.

Заметим, что собственному числу $\lambda = -1$ кратности 2 отвечает лишь один с точностью до числового множителя собственный вектор $x = (1,2,1)^T$, т.к. в рассматриваемом примере также $rang(A - \lambda E) = 2$ при $\lambda = -1$. Таким образом, матрица A имеет лишь два линейно независимых собственных вектора.

3.5. Диагонализируемость матрицы оператора

Если существует базис $\{e_i\}$, состоящий из *собственных векторов* оператора $A : R^n \to R^n$, то в этом базисе его матрица имеет диагональный вид, поскольку $Ae_i = \lambda_i e_i$. При этом по диагонали расположены *собственные числа* оператора A

$$f(e_i) = A \cdot e_i = \lambda \cdot e_i, \qquad i = \overline{1,n}; \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Но не всякий линейный оператор имеет такой базис, поскольку собственных линейно независимых векторов может быть менее n (см. пример 4 выше).

Квадратная матрица A называется *диагонализируемой*, если существует такая *диагонализирующая* матрица S, что

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n). \tag{57}$$

Линейный оператор называется *оператором простой структуры*, если существует базис, состоящий из собственных векторов этого оператора.

Если геометрическая кратность каждого собственного значения равна алгебраической, то говорят, что оператор имеет простую структуру, а его матрица диагонализируема.

Следствие. Если все характеристические числа вещественной матрицы вещественны и попарно различны (нет кратных), то матрица диагонализируема в вещественном пространстве.

При этом столбцами матрицы S, диагонализирующей A, являются линейно независимые собственные векторы матрицы A.

Пример 5. Матрица (см. пример 2) $$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Имеет характеристические числа $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -9$, кратность каждого из которых равна соответственно $m_1 = 2, m_2 = 1$. Ранг r_2 матрицы $A - \lambda_2 E$ равен единице, и $n - r_1 = 3 - 1 = 2 = m_1$. Ранг r_2 матрицы $A - \lambda_2 E$ равен двум, и $n - r_2 = 3 - 2 = 1 = m_2$. Таким образом, условие диагонализируемости выполнено, и матрица A приводится к диагональному виду, например

$$A^* = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу S, удовлетворяющую условию $S^{-1}AS = A^*$. Собственными векторами матрицы A с собственным значением $\lambda_1 = 9$ будут $x = \left(c_1, -2c_1 - 2c_2, c_2\right)^T$, а с собственными значение $\lambda_2 = -9 \to y\left(2t, t, 2t\right)^T$ (см. пример 2).

Положив $c_1 = 0, c_2 = 1$ и $c_1 = 1, c_2 = 0, t = 1$, получим собственные векторы $x_1\left(0, -2, 1\right)$, $x_2\left(1, -2, 0\right)$, $x_3\left(2, 1, 2\right)$, составляющие базис. Следовательно,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Несложно проверить, что (см. (57))

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

3.6. Симметрический оператор

Линейный оператор $A : E^n \to E^n$, действующий в евклидовом пространстве E^n, называется *симметрическим*, или с*амосопряженным*, если для любых векторов x и y из E^n для скалярных произведений выполняется условие

$$\left(x, Ay\right) = \left(y, Ax\right) \text{ или } |x| \cdot |\lambda y| \cdot \cos\left(x, y\right) = |y| \cdot |\lambda x| \cdot \cos\left(x, y\right),$$

которое в матричной записи примет вид

$$xAy = yAx. \tag{58}$$

Отметим некоторые свойства симметрического линейного оператора.

Свойство1. Линейный оператор A является симметрическим тогда и только тогда, когда его матрица A в любом *ортонормированном* базисе симметрична, т.е. совпадает с транспонированной матрицей A^T.

Свойство 2. Собственные векторы симметрического линейного оператора A, отвечающие различным собственным числам λ_1 и λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$, ортогональны.

Действительно, если собственные векторы x и y оператора A отвечают собственным числам λ_1 и λ_1, то $Ax = \lambda_1 x, Ay = \lambda_2 y$ и поэтому $(Ax, y) = \lambda_1 (x, y)$, $(x, Ay) = \lambda_2 (x, y)$. Так как оператор А симметрический то $(Ax, y) - (x, Ay) = 0$, т.е. $(\lambda_1 - \lambda_2)(x, y) = 0$. Поскольку $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, то $(x, y) = 0$, следовательно, векторы x и y ортогональны.

Свойство 3. Собственному числу кратности m симметрического линейного оператора соответствует линейно независимая система из m собственных векторов этого оператора.

Свойство 4. Для всякого симметрического линейного оператора (симметричной матрицы) существует ортонормированный базис, состоящий из его собственных векторов.

Справедливость свойств 3 и 4 примем без доказательства.

Таким образом, симметрический оператор всегда диагонализируем, причем ортогональным преобразованием.

Задачи

1. Найти собственные числа и векторы для оператора подобия на плоскости $Ax = kx$.

2. Найти собственные числа и векторы для оператора вращения на угол $0 \leq \alpha \leq \pi$ на плоскости (см.(41)).

3. Найти собственные числа и векторы для оператора зеркального отражения плоскости относительно прямой $y = x$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Найти собственные числа и векторы для оператора сжатия к прямой $y = kx$ исходя из их геометрического смысла.

5. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Квадратичные формы

Однородный многочлен второй степени относительно переменных x_1 и x_2

$$K(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x^T Ax, \qquad (59)$$

не содержащий свободного члена и неизвестных в первой степени, называется *квадратичной формой* переменных x_1 и x_2. Матрица A квадратичной формы симметрическая, т.е. $a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j = \overline{1, n}$.

Аналогичное определение можно дать квадратичной форме n переменных:

$$K(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = x^T Ax, \qquad (60)$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{pmatrix}^T$ - n-мерный вектор-столбец, A – симметрическая матрица n-го порядка.

Численно квадратичная форма является скалярной функцией векторного аргумента, когда каждому вектору ставится в соответствие скалярное значение.

Пример.

$$K(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 4x_1^2 - 6x_1x_2 + 8x_1x_3 + x_2^2 - 5x_3^2.$$

Приведение квадратичных форм к каноническому виду

Квадратичная форма (60) имеет канонический вид, если все внедиагональные элементы ее матрицы нулевые: $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Каноническая квадратичная форма, например, третьего порядка имеет вид

$$K(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2, \qquad (61)$$

а ее матрица является диагональной.

Пусть в некотором базисе ξ задана квадратичная форма матрицей A_ξ. Рассмотрим, как изменится матрица квадратичной формы A_η при переходе к новому базису η по известной формуле (49) $x_\xi = Sx_\eta$

$$K(x_\xi) = x_\xi^T A_\xi x_\xi = (Sx_\eta)^T A_\xi Sx_\eta = x_\eta^T S^T A_\xi Sx_\eta = x_\eta^T A_\eta x_\eta = K(x_\eta),$$

где $$A_\eta = S^T A_\xi S \tag{62}$$

- матрица квадратичной формы в новом базисе.

При этом, переход к другому базису с матрицей *S*, изменит матрицу формы, однако ее числовое значение в каждой геометрической точке не изменится.

Ортогональное преобразование

Поскольку матрица *A* (59) квадратичной формы симметрическая с попарно ортогональными собственными векторами, то матрица преобразования координат S_0, столбцы которой – *нормированные собственные векторы матрицы A*, преобразует эту матрицу к диагональному виду.

$$A_\eta = S_0^{-1} A_\xi S_0 = S_0^T A_\xi S_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{63}$$

Пример. Привести ортогональным преобразованием квадратичную форму к каноническому виду и представить матрицу соответствующего преобразования координат, если матрица квадратичной формы в некотором базисе имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}. \tag{64}$$

Решение.

Собственные числа есть корни характеристического многочлена:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (17-\lambda)(8-\lambda) - 36 = \lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 20$; $\lambda_2 = 5$.

Значит канонический вид квадратичной формы и ее матрицы

$$K(y) = 20y_1^2 + 5y_2^2; \qquad A^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}. \tag{65}$$

Найдем матрицу перехода к каноническому базису $x = S_0 y$, которая состоит из *нормированных собственных векторов матрицы A*.

Собственным вектором, соответствующим собственному числу λ называется ненулевое решение матричного уравнения $(A - \lambda E)x = 0$.

Для собственного числа $\lambda_1 = 20$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 - 2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2x_2, \text{ откуда } v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для собственного числа $\lambda_2 = 5$:

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -2x_1, \text{ откуда } v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Определив нормирующий множитель как $c = 1/|v| = 1/\sqrt{5}$, получим матрицу перехода

$$S_o = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \qquad \det(S_o) = -1. \tag{66}$$

На основании (62) выполним проверку

$$S_o^T A S_o = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = A^*.$$

При этом переход к новым координатам выполняется по формулам (49)

$$y = S_0^{-1}x = S_0^T x; \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{67}$$

Неортогональное преобразование Лагранжа

Привести квадратичную форму к каноническому виду можно не только ортогональным преобразованием. Одним из наиболее распространенных неортогональным преобразованием является метод выделения полных квадратов или метод Лагранжа. Рассмотрим алгоритм этого метода на представленном выше примере.

Пример. Привести методом Лагранжа квадратичную форму к каноническому виду и матрицу соответствующего преобразования координат, если матрица квадратичной формы в некотором базисе имеет вид (64).

1. Запишем квадратичную форму *в стандартном виде* (59)

$$K(x) = x^T A x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2$$

2. Выберем в КФ все члены, содержащие x_1 и выделим в них полный квадрат

$$17x_1^2 + 12x_1x_2 = 17x_1^2 + 2\cdot\sqrt{17}x_1\frac{6}{\sqrt{17}}x_2 + \frac{36}{17}x_2^2 - \frac{36}{17}x_2^2 = \left(\sqrt{17}x_1 + \frac{6}{\sqrt{17}}x_2\right)^2 - \frac{36}{17}x_2^2.$$

3. Введем новую переменную $y_1 = \sqrt{17}x_1 + \dfrac{6}{\sqrt{17}}x_2$ и подставим ее в КФ, которая уже не будет содержать переменной x_1

$$K(x) = y_1^2 - \frac{36}{17}x_2^2 + 8x_2^2 = y_1^2 + \frac{100}{17}x_2^2.$$

4. Последовательно выполняя эти операции для всех переменных, получим искомую каноническую форму. Так обозначив $y_2 = \frac{10}{\sqrt{17}} x_2$, получим

$$K(y) = y_1^2 + y_2^2, \text{ откуда } A_L^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{68}$$

5. Найдем матрицу S_L перехода к каноническому базису, учитывая, что нам известна $y = S_L^{-1} x$:

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt{17} x_1 + \frac{6}{\sqrt{17}} x_2; \\ y_2 = \frac{10}{\sqrt{17}} x_2. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \tag{69}$$

$$S_L^{-1} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \to S_L = \sqrt{17} \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 0 & 17 \end{pmatrix}. \tag{70}$$

6. На основании (62) выполним проверку

$$S_L^T A S_L = \frac{1}{10\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -6 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 0 & 17 \end{pmatrix} \frac{1}{10\sqrt{17}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_L^*.$$

Сравнивая (65) с (68) и (66) с (70), заключаем, что и сама каноническая форма и канонизирующее преобразование координат существенно различны. Геометрически это можно объяснить тем, что ортогональное преобразование лишь разворачивает систему координат, в то время как неортогональное выполняет линейную «деформацию» плоскости.

Теория квадратичных форм используется, в частности, для приведения к каноническому виду уравнений кривых и поверхностей второго порядка.

Задачи

1. Привести к диагональному виду с помощью ортогональных преобразований симметрическую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\lambda_1 = -3 \to v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T$; $\lambda_2 = 3 \to v_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$; $v_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2$.

3. Дана матрица A линейного оператора в R^2. 1) Получить стандартную форму оператора. 2) Привести оператор, заданный матрицей A, к каноническому виду, а также найти базис, в котором она имеет этот вид.

а) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

б) $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

5. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Линии, определяемые уравнениями второй степени относительно текущих координат, называют *кривыми второго порядка*

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (71)$$

Коэффициенты уравнения - действительные числа, но по крайней мере одно из чисел A, B или C отлично от нуля.

Кривые второго порядка на плоскости – это линии пересечения кругового конуса с плоскостями, не проходящими через его вершину. Если такая плоскость пересекает все образующие одной полости конуса, то в сечении получается *эллипс*, при пересечении образующих обеих полостей – *гипербола*, а если секущая плоскость параллельна какой-либо образующей, то сечением конуса является *парабола*.

Эллипс

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Пусть точки F_1 и F_2 – фокусы, показанные на рисунке 1;

$2c$ – расстояние между фокусами;

$2a$ – сумма расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов.

По определению $2a > 2c$, т. е. $a > c$.

$$r_1 + r_2 = \left|\overrightarrow{MF_1}\right| + \left|\overrightarrow{MF_2}\right| = 2a > 2c$$

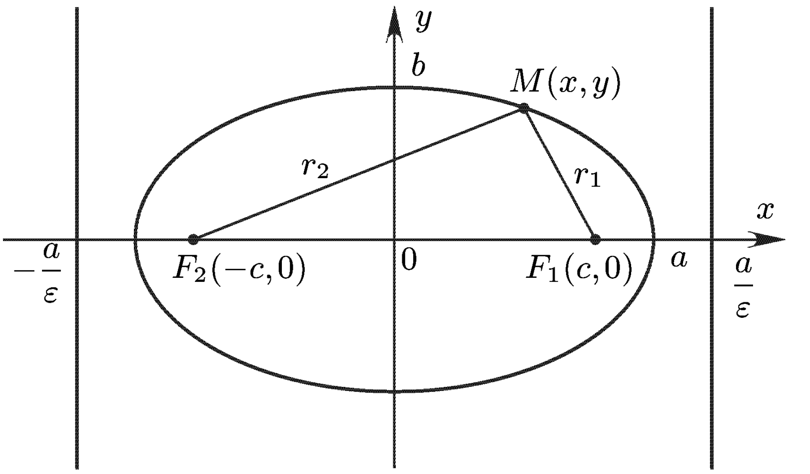


Рисунок 1 - Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ , \qquad (72)$$

где $c^2 = a^2 - b^2$

- каноническое уравнение эллипса.

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad 0 < \varepsilon < 1$$

- эксцентриситет.

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}\ ; \quad \frac{r}{d} = \varepsilon\,.$$

Параметрические уравнения эллипса $\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t. \end{cases}$ t - центральный угол.

Длины отрезков $\left|\overrightarrow{F_1M}\right| = r_1$ и $\left|\overrightarrow{F_2M}\right| = r_2$ называются фокальными радиусами точки M

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \varepsilon x \text{ и } r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \varepsilon x .$$

Для двух случаев, когда $r_1 = 0$ и $r_2 = 0$, получим $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$.

Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами эллипса*.

Если r - расстояние от произвольной точки эллипса до какого-нибудь фокуса, d- расстояние от этой же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\dfrac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса: $\dfrac{r}{d} = \varepsilon$.

Эллипс с равными полуосями $a = b = r$ является окружностью

$$x^2 + y^2 = r^2; \quad \varepsilon = 0.$$

Гипербола

Гиперболой *называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых* ***фокусами****, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.*

Пусть точки F_1 и F_2 – фокусы, показанные на рисунке 2;

2c – расстояние между фокусами;

2a – разность расстояний от произвольной точки гиперболы до фокусов.

По определению $2a < 2c$, т. е. $a < c$

$$|r_1 - r_2| = \left\|\overrightarrow{MF_1}\right| - \left|\overrightarrow{MF_2}\right\| = 2a < 2c$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ где } c^2 = a^2 + b^2 \tag{73}$$

- каноническое уравнение гиперболы.

$$y = \pm\frac{b}{a}x \quad \text{- асимптоты гиперболы.}$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \quad \text{- эксцентриситет гиперболы.}$$

$$\varepsilon > 1 \text{, т. к. } c > a; \quad \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}; \quad \frac{r}{d} = \varepsilon .$$

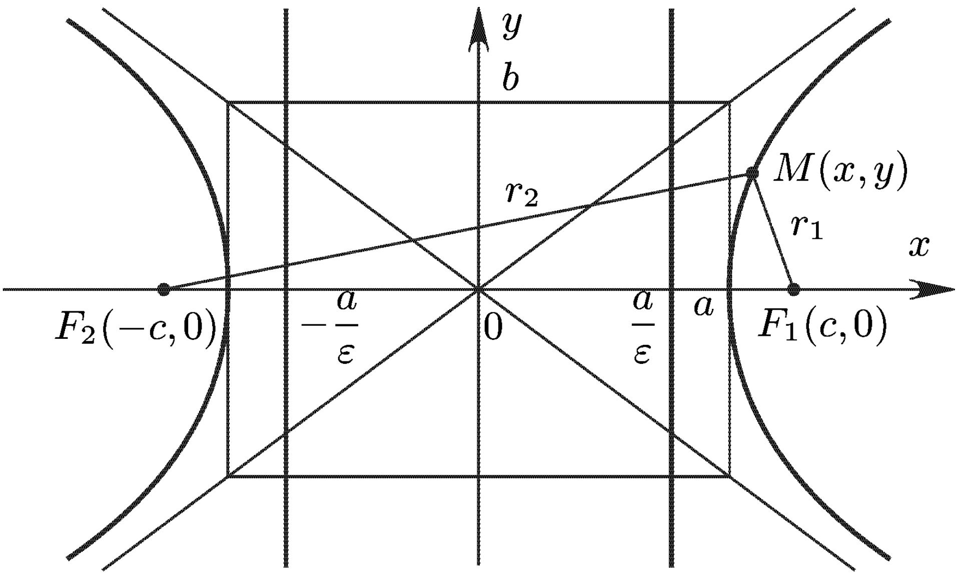


Рисунок 2 - Гипербола

Гипербола называется *равносторонней,* если ее полуоси равны ($a=b$). Ее каноническое уравнение

$$x^2-y^2=a^2. \tag{74}$$

Асимптоты равносторонней гиперболы имеют уравнения $y=x$ и $y=-x$ являются биссектрисами координатных углов.

Эксцентриситет равносторонней гиперболы равен $\varepsilon=\sqrt{2}$.

Фокальные радиусы $r_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ и $r_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ для точек правой ветви гиперболы имеют вид $r_1=\varepsilon x-a$ и $r_2=\varepsilon x+a$, а для левой - $r_1=-(\varepsilon x-a)$ и $r_2=-(\varepsilon x+a)$.

Прямые $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* гиперболы. Директрисы гиперболы имеют то же свойство $\frac{r}{d}=\varepsilon$, что и директрисы эллипса.

Гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ имеют общие асимптоты. Такие гиперболы называются *сопряженными*.

Парабола

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Расстояние от фокуса F до директрисы называется *параметром* параболы и обозначается через p ($p>0$).

Каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px \qquad (75)$$

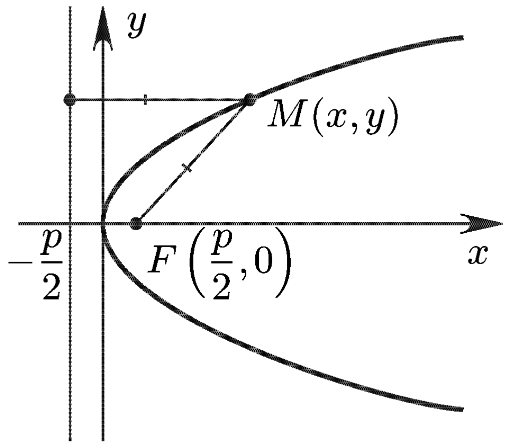


Рисунок 3 - Парабола

Точка *O(0;0)* называется *вершиной параболы*, отрезок $FM = r$ называется *фокальным радиусом* точки *M*.

Уравнения $y^2 = -2px, x^2 = 2py, x^2 = -2py(p > 0)$ также определяют параболы.

Нетрудно показать, что график квадратного трехчлена $y = Ax^2 + Bx + C$, где $A \neq 0, B$ и C любые действительные числа, представляет собой параболу в смысле приведенного выше ее определения.

Неполное уравнение второго порядка

Уравнения эллипса, гиперболы, параболы и уравнение окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ после преобразований можно записать с помощью *единого* уравнения вида

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (76)$$

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & D \\ 0 & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ \textit{или} \ \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & b_1 \\ 0 & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

где коэффициенты A и C не равны нулю одновременно.

Уравнение (76) называется *неполным алгебраическим уравнением 2-го порядка.* В нем отсутствует элемент, пропорциональный произведению переменных $2Bxy$.

Возникает вопрос: всякое ли уравнение вида (76) определяет одну из кривых (эллипс, гипербола, парабола) второго порядка?

Теорема. Уравнение (76) всегда определяет: либо эллипс (окружность) (при $A \cdot C > 0$), либо гиперболу (при $A \cdot C < 0$), либо параболу (при $A \cdot C = O$). При этом возможны случаи вырождения: для эллипса (окружности) - в точку или мнимый эллипс (окружность), для гиперболы - в пару пересекающихся прямых, для параболы - в пару параллельных прямых.

Пример.1. Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением $4x^2 + 5y^2 + 20x - 30y + 10 = 0$.

Решение: Предложенное уравнение определяет эллипс ($A \cdot C = 4 \cdot 5 > 0$). Действительно, проделаем следующие преобразования:

$$4\left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) - 25 + 5\left(y^2 - 6y + 9\right) - 45 + 10 = 0,$$

$$4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + 5\left(y - 3\right)^2 = 60, \qquad \frac{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2}{15} + \frac{\left(y - 3\right)^2}{12} = 1.$$

Получилось каноническое уравнение эллипса с центром в $O_1\left(-\frac{5}{2};3\right)$ и полуосями $a = \sqrt{15}$ и $b = \sqrt{12}$.

Пример.2. Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением $x^2 + 10x - 2y + 11 = 0$.

Решение: Указанное уравнение определяет параболу $\left(C = 0\right)$. Действительно,

$$x^2 + 10x + 25 - 25 - 2y + 11 - 25 = 0,$$

$$\left(x + 5\right)^2 = 2y + 14, \ \left(x + 5\right)^2 = 2\left(y + 7\right).$$

Получилось каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $O_1\left(-5;-7\right)$ и $p = 1$.

Таким образом, всякое неполное алгебраическое уравнение 2-го порядка путем переноса начала системы координат можно привести к каноническому виду.

Общее уравнение второго порядка

Рассмотрим теперь общее уравнение второй степени с двумя неизвестными:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0 \qquad (77)$$

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Оно отличается от уравнения (76) наличием члена с произведением координат.

Линия, определяемая общим уравнением второго порядка, называется *алгебраической линией второго порядка*.

Путем поворота координатных осей на угол α, можно преобразовать это уравнение к неполному (76), чтобы в нем член с произведением координат отсутствовал.

Для этого необходимо перейти к координатной системе, определяемой базисом из ортонормированных собственных векторов матрицы А. В этом базисе уравнение (77) примет вид:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2\tilde{b}_1 x' + 2\tilde{b}_2 y' + \tilde{c} = 0 \tag{78}$$

(в предположении, что $\lambda_{1,2}$ не равны 0).

Затем, чтобы избавиться от линейных слагаемых, определим параллельный перенос формулами:

$$x'' = x' + \frac{\tilde{b}_1}{\lambda_1}, \quad y'' = y' + \frac{\tilde{b}_2}{\lambda_2}. \tag{79}$$

Получим в новой координатной системе уравнение

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = \tilde{\tilde{c}}. \tag{80}$$

Задачи

1. Дана точка А(-4; 6). Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок ОА.

2. Найти центры и радиусы окружностей: а) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0;$
   б) $x^2 + y^2 + 5x - 7y + 2{,}5 = 0;$ в) $x^2 + y^2 + 7y = 0$.

3. Написать каноническое уравнение эллипса, если:
   а) расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось $b=3$.
   б) большая полуось $a=6$, а эксцентриситет равен 0,5.

4. Эллипс, симметричный относительно осей координат, с фокусами на оси OX, проходит через точку $M\left(-4;\sqrt{21}\right)$ и имеет эксцентриситет $\varepsilon = 3/4$. Написать уравнение эллипса и найти фокальные радиусы точки *M*.

5. Построить гиперболу $x^2 - 4y^2 = 18$ и ее асимптоты. Найти фокусы, эксцентриситет, угол между асимптотами.

6. Найти эксцентриситет гиперболы, асимптота которой составляет в вещественной осью угол а) 60^0; б) 45^0; в) a.

7. Построить параболы, заданные уравнениями:
   а) $y^2 = 4x$; б) $y^2 = -4x$; в) $x^2 = 4y$; г) $x^2 = -4y$.

8. В параболу $y^2 = 2x$ вписан правильный треугольник. Найти его вершины.

9. Дано уравнение линии $9x^2 + 16y^2 - 90x + 32y + 97 = 0$. Записать уравнение линии в нормальной форме и построить эту кривую.

10. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.

$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2.$

11. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием. $-3x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Наука, 1987. – 328 с.
2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. - М.: Наука, 1975. – 272 с.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. -10-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2011. - 608 с.
4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. - М.:, Физматлит, 2006. -335 с.
5. Литвин Д.Б., Яновский А.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Часть 1. Учебное пособие. – Ставрополь : Сервисшкола, 2016. – 76 с.
6. Литвин Д.Б.,Мелешко С.В. Линейные системы и операторы. Линии и поверхности второго порядка: учебное пособие. – Ставрополь : Сервисшкола, 2016. – 82 с.

Публикуется в авторской редакции

Подписано в печать 29.08.2020. Бумага офсетная. Гарнитура "Times".
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 5. Тираж 100 экз. Заказ №13.

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии издательско-полиграфического комплекса СтГАУ "АГРУС", г.Ставрополь, ул.Пушкина, 15. тел. 35-06-94